SPAZIO E TEMPO,

per HERMANN MINKOWSKI.

Questo lavoro del Minkowski era l'oggetto della sua attività fino agli ultimi giorni anzi fino alle ultime ore che precedettero la sua fine immatura. L'avea pronunciato nel Congresso dello scorso anno a Colonia dinnanzi ad un pubblico numeroso, formato di matematici, fisici, filosofi che erano con grande interesse accorsi ad udirlo, destando in tutti vera ammirazione. Pochi giorni prima della sua morte ne consegnava il manoscritto al Prof. Riecke per la pubblicazione nel Physikalische Zeitschrift e ancora poche ore prima della sua morte si occupava della correzione per la stampa.

Era nato il 22 giugno 1864 ad Alexoten in Russia ma era andato da fanciullo in Germania. A 15 anni entrava all' Università e tre anni dopo meritava il gran premio dell'Accademia di Parigi con un lavoro sulla teoria dei numeri. In quell' occasione il grande matematico francese C. Jordan lo incoraggiava così a proseguire i suoi studi « Travaillez, je vous prie, á devenir un géomètre éminent ». E il Minkowski il divenne: i suoi lavori sulla teoria dei numeri dapprima, e poi su quella che egli chiamò « Geometria dei numeri », e più tardi su questioni di Geometria pura gli procurarono in breve la fama di uno dei più eminenti matematici della Germania.

In questi ultimi anni avea cominciato ad occuparsi di fisica-matematica: l'aveano specialmente attirato le nuove teorie elettrodinamiche e vi si era dato con tutta la forza dal suo ingegno vigoroso e geniale. La sua memoria sull'equazioni fondamentali per l'elettrodinamica dei corpi in moto, pubblicata al principio dell' anno scorso, destò inte-

resse in tutto il mondo matematico. Il risultato più importante di questo suo lavoro era che, posto come fondamento il principio della Relatività, tutte le leggi del moto possono dedursi dal solo principio della conservazione dell' energia.

E quando volle estendere a tutte le leggi della natura il principio dell' invarianza dell' equazioni fondamentali della elettrodinamica riconosciuta dal Lorentz, lo concepì come una proprietà già inclusa nel concetto di spazio e di tempo. Questo nuovo orizzonte che si apriva al suo sguardo di scienziato profondo egli lo delineava in questo suo ultimo lavoro « Spazio e Tempo ».

Colpito improvvisamente da un male senza rimedio nei primi giorni di quest' anno, egli si doleva coi suoi di non poter proseguire questi studi in cui tanto sentiva di poter fare, e si lusingava che i fondamenti da lui gettati sarebbero stati base di studi di altri scienziati dopo lui. Moriva dopo solo tre giorni, il 12 gennaio a Göttingen, nel pieno vigore delle sue forze intellettuali e della sua attività, con perdita grande della scienza e lasciando universale rimpianto in tutti quelli che insieme alle singolari doti della sua mente aveano potuto apprezzare anche quelle del suo cuore.

G. GIANFRANCESCHI.

Signori ! [1])

Le considerazioni che sono per esporvi sullo spazio e sul tempo, sono cresciute nel campo della fisica sperimentale; in ciò sta la loro forza. Esse hanno una tendenza radicale. Da quest'ora in poi lo spazio in se stesso, e il tempo in se stesso, debbono piombar nelle tenebre e soltanto una specie di unione dei due deve serbare la sua individualità.

1) È quasi impossibile riprodurre in una traduzione di questo lavoro del Minkowski la vivace espressione e la frase spesso originale dell' autore. Ho cercato di conservare per quanto potevo il colorito del suo scritto. Sono in special modo debitore e grato al Prof. G. Castelnuovo per la sua efficace cooperazione prestatami col correggere il manoscritto.

G. G.

I.

Vorrei dapprima esporre come si possa dalla meccanica attualmente ammessa giungere alle nuove idee di spazio e di tempo per mezzo di considerazioni puramente matematiche. Le equazioni della meccanica newtoniana presentano una doppia invarianza.

Un primo caso in cui rimane invariata la loro forma è quando si sottopone ad uno spostamento qualunque il sistema fondamentale di coordinate dello spazio; il secondo quando esso viene modificato nel suo stato di moto, cioè quando gli si imprime un qualsiasi moto uniforme di traslazione, inoltre l'origine dei tempi non ha alcuna influenza. Si è soliti di considerare come stabiliti gli assiomi della geometria quando ci si sente maturi per gli assiomi della meccanica, e perciò quelle due invarianze vengono ben di rado nominate insieme.

Ciascuna di esse rappresenta un certo gruppo di trasformazioni in se stesse per le equazioni differenziali della meccanica. L'esistenza del primo gruppo si riguarda come un carattere fondamentale dello spazio. Il secondo gruppo si suole punirlo col disprezzo, sorvolando con leggerezza sul fatto che, dai fenomeni fisici non si può mai decidere se lo spazio supposto dapprima come in quiete si trovi alla fine in una traslazione uniforme.

Cosi quei due gruppi conducono una esistenza totalmente separata l'uno dall'altro. Il loro carattere del tutto eterogeneo ha forse distolto dal comporli. Ma appunto il gruppo totale composto come un tutto ci dà materia a considerazione.

Vediamo di raffigurarci graficamente i fenomeni.

Siano x, y, z, coordinate rettilinee per lo spazio, e t rappresenti il tempo.

Oggetto della nostra osservazione sono sempre, e soltanto, spazio e tempo insieme considerati. Non ha mai alcuno osservato un *luogo* se non ad un certo *tempo*, ne' un *tempo* se non in un luogo determinato. Io rispetto ancora il dogma che spazio e tempo hanno ciascuno una significazione propria indipendente. Un punto-spazio, in un punto-tempo, ossia un sistema di valori x, y, z, t, lo chiamo *punto universale* (Weltpunkt).

La molteplicità di tutti i sistemi immaginabili di valori x, y, z, t, si chiamerà *universo* (Welt). Io potrei con arditi tratti di gesso tracciar sulla tavola i 4 assi dell'*universo*. Ma già un asse è costituito da molecole vibranti, e compie il cammino della terra, dà quindi abbastanza da astrarre; l'astrazione un po' più grande legata col numero 4 non dà fastidio al matematico. Per non lasciar in nessuna parte un vuoto noioso ci figuriamo che in ogni luogo e ad ogni tempo sia presente qualche cosa di osservabile. Per non dire materia o elettricità, per questo qualche cosa adoprerò la parola *sostanza*. Volgiamo la nostra attenzione al punto sostanziale presente nel punto universale x, y, z, t, e ammettiamo di esser sempre in grado di riconoscere questo punto sostanziale in qualunque altro tempo. Ad un elemento di tempo dt corrispondano le variazioni $dx\ dy\ dz$ delle coordinate di spazio di questo punto sostanziale. Otteniamo allora come immagine, per così dire, del perpetuo corso di vita del punto sostanziale una curva nell'*universo*, una *linea universale* (Weltlinie), i cui punti si riferiscono univocamente al parametro t da $-\infty$ a $+\infty$. Tutto l'*universo* risulta così scomposto in tali *linee universali*, e potrei senz'altro notare fin d'ora che, a mio parere, le leggi fisiche dovrebbero trovare la loro perfetta espressione come scambievoli relazioni fra queste *linee universali*. Mediante il concetto di spazio e tempo restano determinate le molteplicità $t=0$ e le due faccie $t>0$ e $t<0$.

Conserviamo fissa per semplicità l'origine dello spazio e del tempo, allora il primo gruppo della meccanica significa che noi possiamo sottoporre la terna degli assi x, y, z ad una rotazione arbitraria intorno all'origine, entro $t=0$, corrispondentemente alle trasformazioni lineari omogenee dell'espressione

$$x^2+y^2+z^2$$

in se stessa.

Il secondo gruppo poi significa che possiamo sostituire alle quantità

$$x, y, z, t$$

le altre

$$x - \alpha t, \quad y - \beta t, \quad z - \gamma t, \quad t$$

dove α, β, γ sono costanti arbitrarie, senza che l' espressione delle leggi meccaniche venga alterata. All'asse del tempo può darsi quindi una direzione pienamente arbitraria nel semispazio superiore $t > 0$. Che significato ha ora la condizione dell' ortogonalità nello spazio con questa piena libertà dell' asse del tempo in tutta la regione superiore?

Per istabilire il collegamento prendiamo un parametro positivo c e consideriamo la figura

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 .$$

Essa consta di due calotte separate da $t = 0$, analoghe a quelle di un iperboloide a due falde.

Consideriamo la falda superiore contenuta nel campo $t > 0$ e assumiamo quelle trasformazioni lineari omogenee delle x, y, z, t, nelle quattro nuove variabili x', y', z', t', per le quali l' espressione precedente si conserva invariata.

A queste trasformazioni appartengono naturalmente le rotazioni dello spazio intorno all' origine. Una piena idea delle altre trasformazioni possiamo formarcela se consideriamo quelle trasformazioni per cui y e z rimangono invariati. Disegniamo la sezione di quella falda col piano formato dagli assi x e t; avremo il ramo superiore dell' iperbole

$$c^2 t^2 - x^2 = 1$$

con i suoi asintoti.
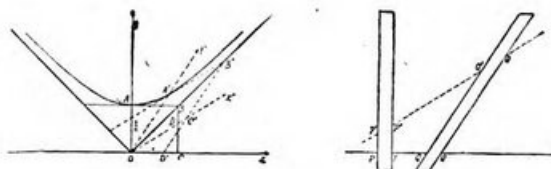
Fig. 1.

Si tiri inoltre dal punto O un raggio vettore qualsiasi OA' di questo ramo d' iperbole, la tangente in A' all' iperbole fino all' incontro B' con l' asintoto di destra, si completi poi il pa-

rallegrammo O A' B' C', e si prolunghi B' C' fino all' incontro D' con l' asse x.

Prendiamo allora OC' ed OA' come assi di coordinate parallele $x' t'$ con le unità di misura $OC' = 1$ ed $OA' = \frac{1}{c}$; allora quel ramo d' iperbole ha ancora la equazione

$$c^2 t'^2 - x'^2 = 1 \ , \ t' > 0 \, ,$$

e il passaggio da x, y, z, t, ad x', y', z', t', si compie mediante una delle trasformazioni in questione.

Aggiungiamo ancora alle trasformazioni caratterizzate gli spostamenti arbitrarii dell' origine dello spazio e del tempo, e costituiamo con ciò un gruppo di trasformazioni che dipenderà dal parametro c e che io rappresenterò con G_c.

Facciamo ora crescere c all' infinito e quindi convergere verso zero $\frac{1}{c}$; allora badando alla figura descritta, apparisce che il ramo d' iperbole si avvicina sempre più all' asse x, l'angolo degli asintoti si allarga tendendo ad un angolo piatto, quella trasformazione speciale si muta in una in cui l'asse t' può avere verso l' alto una direzione arbitraria, e x' si avvicina sempre più ad x.

Da ciò apparisce che dal gruppo G_c facendo tendere c al limite $c = \infty$, si ottiene appunto quel gruppo G_∞ che appartiene alla meccanica di Newton.

Stando così le cose, ed essendo G_c matematicamente intelligibile come G_∞, avrebbe potuto venire in mente ad un matematico di fervida fantasia, che i fenomeni della natura possedessero di fatto un' invarianza non nel gruppo G_∞ ma piuttosto nel gruppo G_c, dove c è determinato e finito, e solo molto grande rispetto alle unità ordinarie. Un tale presentimento sarebbe stato un trionfo straordinario per la matematica pura.

Qui veramente la matematica non ha compiuto il primo passo, le rimane tuttavia la soddisfazione, che essa grazie ai precedenti successi, può, coi suoi sensi rafforzati dall' esercizio della larga visione, comprender subito le profonde conseguenze di un tale mutamento nel modo di concepire la natura.

Voglio subito far notare con qual valore di c si abbia che fare. Con c s' intende la velocità di propagazione della luce nel vuoto. Per non parlare nè di spazio nè di vuoto possiamo definire questa grandezza come il rapporto fra l'unità elettrostatica ed elettromagnetica di quantità di elettricità.

L' esistenza dell' invarianza delle leggi della natura per il gruppo G_c andrebbe così concepita:

Dalla totalità dei fenomeni della natura si può dedurre con successive approssimazioni un sistema di riferimento x, y, z, e t, spazio e tempo, mediante il quale i fenomeni si rappresentano secondo leggi determinate. Questo sistema però non è individuato interamente dai fenomeni. *Si può ancora variare comunque il sistema di riferimento corrispondentemente alle trasformazioni del detto gruppo G_c, senza che venga alterata l' espressione delle leggi della natura.*

Per esempio: si può, secondo la figura descritta, chiamare t' il tempo, si deve però allora definire lo spazio mediante la molteplicità dei tre parametri x', y, z; con ciò le leggi fisiche si esprimeranno egualmente bene con le x', y, z, t', come con le x, y, z t.

Noi avremo dunque nell'*universo* non più *lo* spazio, ma infiniti spazii, appunto come nello spazio a tre dimensioni si hanno infiniti piani. La Geometria a tre dimensioni diviene un capitolo della fisica a quattro dimensioni.

Loro vedono perchè io dapprincipio diceva che spazio e tempo devono piombar nelle tenebre, e deve solo un *universo* conservare la sua individualità.

II.

Si domanda ora: quali circostanze ci costringono alla nuova concezione di spazio e di tempo; non è questa mai in contrasto coi fenomeni? apporta essa vantaggio per la descrizione dei fenomeni?

Prima di entrare in tali questioni facciamo un' osservazione importante.

Se noi abbiamo comunque individuato spazio e tempo, ad un punto sostanziale in quiete corrisponde come *linea uni-*

versale una parallela all' asse t, ad un punto sostanziale che si muove di moto uniforme, una retta inclinata rispetto all' asse t, ad un punto sostanziale che si muove con un moto vario, una linea curva. Prendiamo in un arbitrario *punto universale* x, y, z, t, la *linea universale* che vi passa e scegliamola parallela ad un raggio vettore qualsiasi O A' della falda d' iperboloide anzidetta; possiamo allora introdurre O A' come nuovo asse del tempo e, secondo il nuovo concetto dato di spazio e tempo, la sostanza esistente in quel punto apparisce come in quiete. Possiamo allora porre questo assioma fondamentale:

« La sostanza esistente in un qualsiasi *punto universale* « può essere sempre considerata come in quiete mediante « un' opportuna scelta dello spazio e del tempo ». L' assioma significa che in ciascun *punto universale* l' espressione

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

è costantemente positiva, o ciò che è lo stesso, che ogni velocità v è sempre più piccola di c. Si porrebbe così c come limite superiore di tutte le velocità di sostanza, e in ciò appunto consiste il profondo significato della grandezza c. Questo assioma ha a primo aspetto qualche cosa di sgradevole. Bisogna però riflettere che viene ora a prender campo una meccanica modificata in cui entra la radice quadrata di quella relazione differenziale di 2° grado, sicchè i casi con velocità maggiori di quella della luce vengono presso a poco ad acquistare quell' ufficio che hanno in geometria le figure con coordinate immaginarie.

Ciò che veramente ci muove e ci induce ad ammettere il gruppo G_c è che l' equazione differenziale per la propagazione delle onde luminose nel vuoto, possiede quel gruppo G_c [1]).

Dall' altra parte il concetto di corpo rigido ha significato soltanto in una meccanica con gruppo G_∞. Se ora si avesse un' ottica con G_c e d' altra parte fosse dato un corpo rigido, risulterebbe che fra le due falde d' iperboloide appartenenti

1) Una reale applicazione di questo fatto si trova già in W. Voigt. Götting. Nachr. 1887, p. 41.

a G_c e a G_∞ verrebbe individuata *una* direzione t, e la conseguenza sarebbe che su appropriati istrumenti ottici rigidi nei laboratori si dovrebbe verificare una diversità dei fenomeni per diverse orientazioni rispetto alla direzione del moto translatorio della terra. Tutte le ricerche dirette a questo scopo, in particolare una ben nota esperienza d' interferenza del Michelson, fornirono sempre un risultato negativo.

Per darsi ragione di ciò il Lorentz formulò un' ipotesi il cui successo si basa appunto nell' invarianza dell' ottica per il gruppo G_c.

Secondo il Lorentz ogni corpo in moto deve subire un raccorciamento nella direzione del moto, e precisamente nel rapporto:

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

se v è la sua velocità.

Questa ipotesi ha un' apparenza troppo fantastica. Infatti la contrazione non sarebbe da pensarsi come una conseguenza della resistenza nell' etere, ma puramente come un dono dall' alto, una circostanza che accompagna il fenomeno del moto.

Voglio mostrare sulla nostra figura come l' ipotesi del Lorentz sia del tutto equivalente col nuovo concetto di spazio e di tempo, e per mezzo di questo divenga più intelligibile. Per semplificare facciamo astrazione da y e da z e pensiamo ad un *universo* spaziale, ad una dimensione: allora un corpo in quiete ed uno che si muove di moto uniforme saranno rappresentati il primo da una striscia parallela all'asse della t, l' altro da una inclinata, l' estensione nel senso dello spazio restando costante. Se OA' è parallelo alla 2ª striscia possiamo introdurre t' come tempo e x' come coordinata di spazio, e allora il secondo corpo apparirà in quiete, il primo in moto uniforme. Supponiamo ora che il primo corpo considerato in quiete abbia la lunghezza l, ossia la sezione PP della prima striscia secondo l' asse x sia eguale ad $l \times OC$ essendo OC l'unità di misura sull'asse x, e che d'altra parte il secondo corpo considerato come in quiete abbia la stessa lunghezza l; ciò significa che la sezione della seconda striscia fatta parallelamente all'asse x' è $Q'Q' = l . OC'$. Abbiamo così in questi due

corpi l'immagine di due elettroni di Lorentz eguali, uno in quiete e uno in moto uniforme. Se conserviamo le prime coordinate x e t la dimensione del secondo elettrone è data dalla sezione QQ parallela all'asse x. Ora evidentemente essendo $Q'Q' = l.OC'$ sarà

$$QQ = l.OD'.$$

Un facile calcolo mostra che se $\frac{dx}{dt} = v$ per la seconda striscia si ha

$$OD' = OC\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e quindi

$$PP : QQ = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Questo è dunque il significato dell'ipotesi del Lorentz per la contrazione dell'elettrone nel moto. Consideriamo invece il secondo elettrone come in quiete, ossia prendiamo come sistema x', t': allora la lunghezza del primo è data dalla sezione $P'P'$ parallela ad OC' e il primo elettrone risulterà accorciato per rispetto al secondo poichè

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Lorentz chiamò *tempo locale* dell'elettrone in moto uniforme la combinazione t' di x e t; egli indicò una costruzione fisica di questo concetto per facilitare l'intelligenza dell'ipotesi della contrazione.

Tuttavia è merito dell'Einstein [1]) di aver riconosciuto che il tempo del primo elettrone come quello dell'altro, ossia t e t', sono da trattarsi egualmente. Con ciò il tempo non poteva più venire considerato come un concetto univocamente determinato dai fenomeni. Per ciò che riguarda il mutamento dello spazio nè Einstein nè Lorentz lo avevano preso in considerazione forse perchè nella detta trasformazione speciale quando il piano x', t' ricopre il piano x, t, si poteva pensare

1) A. Einstein. Ann. d. Phys. 17, 891, 1905. Jahrb. d. Radioaktivität. u. Elektronik. 4, 411, 1907.

che l' asse x degli spazi fosse restato nella sua posizione primitiva. L' omettere di operare sullo spazio in modo corrispondente al tempo è tuttavia da chiamarsi una stranezza dal punto di vista della cultura matematica. Dopo questo passo ulteriore, che pure non può tralasciarsi per la giusta intelligenza del gruppo G_c, sembra però a me che la parola *Postulato della Relatività* per l' esigenza di una invarianza nel gruppo G_c sia ben poco opportuna. E poichè il senso del postulato è che dai fenomeni è dato solo l' *universo* a quattro dimensioni nello spazio e nel tempo, mentre la proiezione nello spazio e nel tempo può essere ancora presa con una certa libertà, io darei a questa affermazione il nome di *Postulato dell' universo assoluto* (Postulat der absoluten Welt), o brevemente *Postulato universale* (Wetpostulat).

III.

Per mezzo del *Postulato universale* diviene possibile una uniforme trattazione delle 4 coordinate x, y, z, t che determinano un *punto universale*. Con ciò le forme sotto le quali si esprimono le leggi fisiche guadagnano in chiarezza, come ora mostrerò. Soprattutto il concetto di accelerazione acquista uno spiccato carattere. Mi servirò di un linguaggio geometrico che si presenta immediatamente quando dalla terna $x, y, z,$ si astrae, tacendo, dalla z.

Prendiamo un punto qualunque dell'*universo* O come origine dello spazio e del tempo. Il cono

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$
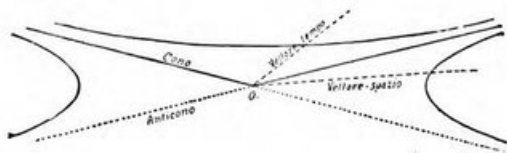
Fig. 2.

con vertice in O si compone di due parti una con valori di $t < 0$ l' altra con $t > 0$; il primo, l'*anticono*, contiene, per

così dire, tutti i punti universali che « mandano luce verso O », il secondo al di là di O, contiene tutti quelli che « ricevono luce da O ». Possiamo chiamare campo *al di quà* di O quello limitato dall'*anticono, al di là* quello limitato dal *cono*. Al di là di O cade la falda d' iperboloide considerato

$$F = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1,\ t > 0.$$

La regione fra i due coni viene riempita dagli iperboloidi ad una falda

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = k^2$$

per tutti i valori costanti positivi di k^2.

Importanti per noi sono le iperboli che hanno O per centro, e giacciono su questi ultimi iperboloidi. I singoli rami di queste iperboli si chiameranno brevemente iperboli intermediarie di centro O. Un tale ramo d'iperbole, considerato come *linea universale* di un punto sostanziale, rappresenta un movimento che per $t = -\infty$ e $t = +\infty$ tende asintoticamente alla velocità della luce c. Se in analogia al concetto di vettore nello spazio chiamiamo *vettore* un segmento rettilineo nella molteplicità delle x, y, z, t, dovremo distinguere fra i *vettori di tempo* diretti da O verso la falda $+F = 1,\ t > 0$, e i *vettori di spazio* diretti da O verso $-F = 1$. L'asse dei tempi può esser parallelo a qualunqne vettore della prima specie. Ogni *punto universale* fra l' anticono e il cono può esser riguardato come contemporaneo con O od anche come anteriore o posteriore secondo il sistema a cui viene riferito. Ogni *punto universale* al di qua di O è necessariamente sempre anteriore, ogni punto al di là posteriore. Al limite $c = \infty$ corrisponde la sovrapposizione delle due superficie coniche e la sparizione della regione cuneiforme compresa tra queste. Nella figura designata questa regione è perciò segnata con diversa ampiezza.

Decomponiamo ogni vettore uscente da O nelle componenti x, y, z, t. Siano poi le direzioni di due vettori rispettivamente quella d' un raggio vettore OR di una delle superficie $\mp F = 1$ e di una tangente RS alla superficie nel punto R; questi due vettori dovranno dirsi *normali*. Perciò

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

è la condizione perchè i vettori di componenti

$$x, y, z, t, \text{ e } x_1, y_1, z_1, t_1$$

siano normali fra loro.

Per la grandezza dei vettori di diversa direzione le unità di misura devono essere fissate in modo che ad un vettore di spazio da O a $-F=1$ si assegni la grandezza 1, ad un vettore di tempo da O a $+F=1$, $t>0$ corrisponda la grandezza $\frac{1}{c}$.

Immaginiamo in un *punto universale* P $(x, y, z, t,)$ la *linea universale* che vi passa di un *punto sostanziale*; l'elemento di vettore di tempo dx, dy, dz, dt della detta linea uscente da P ha la grandezza

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

L'integrale $\int d\tau = \tau$ esteso alla *linea universale* da un punto qualunque fisso P_0 fino ad un punto variabile P lo chiameremo il *tempo proprio* del *punto sostanziale* in P. Consideriamo sulla *linea universale* le x, y, z, t ossia le componenti del vettore OP come funzioni del tempo proprio τ, le loro derivate prime rispetto a τ rappresentiamole con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, le derivate seconde con $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$. Per i corrispondenti vettori adottiamo poi la seguente nomenclatura: la derivata di OP rispetto a τ sia il *vettore di moto* in P, la derivata di quest'ultimo rispetto a τ il *vettore di accelerazione* in P.

Allora si ha

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2$$

$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0$$

ossia il *vettore di moto* è il vettore-tempo nella direzione della *linea universale* in P di grandezza 1, *e il vettore di accelerazione* è normale a *quello di moto* e quindi è certo un vettore-spazio.

Ora esiste un unico determinato ramo d'iperbole che ha comune con la *linea universale* in P tre punti infinitamente vicini e i cui asintoti sono le generatrici rispettivamente di

Fig. 3.

un *anticono* e di un *cono*. Questo ramo d'iperbole lo chiamo *iperbole di curvatura* in P (v. fig. 3). Se M è il centro di questa iperbole, si ha qui una iperbole intermediaria con centro M. Sia ora ρ la grandezza del vettore MP, allora riconosciamo il *vettore di accelerazione* in P come il vettore nella direzione MP di grandezza $\frac{c^2}{\rho}$.

Siano $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ tutte nulle allora l'iperbole di curvatura si riduce alla retta tangente alla *linea universale* in P e deve porsi $\rho = \infty$.

IV.

Per dimostrare che l'ipotesi del gruppo G_c non conduce in nessun caso ad una contradizione colle leggi fisiche è indispensabile una rivista di tutta la fisica fatta in base alla supposizione del gruppo.

Questa revisione è già stata fatta con successo in un certo campo per ciò che riguarda la termodinamica e la propagazione del calore [1]), per i processi elettromagnetici, finalmente per la meccanica conservando l'idea di massa [2]).

Per l'ultimo campo deve anzitutto porsi la questione: Se una forza di componenti X, Y, Z agisce secondo l'asse dello spazio in un *punto universale* P (x, y, z, t), dove il vettore di moto è $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ come dovrà venir essa considerata dopo un cambiamento del sistema?

Ora esistono certi principii verificati circa la forza ponderomotrice nei campi elettromagnetici in quei casi nei quali il gruppo G_c è senza dubbio da ammettersi. Questi principii conducono a questa semplice regola. Per un cambiamento del sistema la forza presupposta deve nelle nuove coordinate di

1) M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme. Berl. Ber. 1907, p. 542. Ann. d. Phys. 26.1. 1908.

2) H. Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. 1908, p. 53.

spazio considerarsi in guisa che rimanga invariato il vettore di componenti

$$iX, iY, iZ, iT,$$

dove

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{i}X + \frac{\dot{y}}{i}Y + \frac{\dot{z}}{i}Z\right)$$

è il lavoro compiuto dalla forza nel *punto universale,* diviso per c^2. Questo vettore è costantemente normale al vettore di moto in P. Un vettore siffatto appartenente ad una forza in P si chiamerà *un vettore di forza in moto* (bewegender Kraftvektor.

Sia ora descritta la *linea universale* passante per P di un punto sostanziale con massa meccanica costante m. Il prodotto del vettore di moto in P per m chiamerò *vettore d' impulso,* il prodotto per m del vettore d'accelerazione in P *vettore di forza del moto in* P (Kraftvektor der Bewegung).

Conforme a queste definizioni la legge secondo cui ha luogo il moto di un punto di massa per un vettore dato di forza in moto si enuncia così:

Il vettore di forza del moto è eguale al vettore di forza in moto [1]).

Questo enunciato comprende quattro equazioni per le componenti secondo i quattro assi; però, i due vettori essendo normali al vettore di moto, la quarta equazione si può considerare come una conseguenza delle prime tre. Secondo il significato di T stabilito sopra, la quarta equazione dà senza dubbio il teorema dell' energia. L' energia cinetica del punto di massa dovrà definirsi come il prodotto per c^2 della componente del vettore d' impulso secondo l' asse t.

La sua espressione è

$$mc^2\frac{dt}{d\tau} = mc^2 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

cioè, fatta astrazione della costante additiva mc^2, l' espres-

1) H. Minkowski. l. c. p. 107. V. anche M. Planck. Verh. d. Physik. Ges. 4. 136, 1906.

sione $\frac{1}{2} m v^2$ della meccanica di Newton a meno di grandezze dell'ordine $\frac{1}{c^2}$.

Appare qui evidente la dipendenza della energia dal sistema di riferimento.

Ma poichè l'asse t può essere scelto nella direzione di un vettore di tempo qualsiasi, così il teorema dell'energia contiene per ogni sistema di riferimento l'insieme di tutte le equazioni del moto.

Questo fatto nel passaggio al limite $c = \infty$, conserva il suo significato anche per l'assiomatica costruzione della meccanica di Newton, ed in questo senso è stato già osservato dal Sig. J. R. Schütz [1]).

Si possono ormai assumere le unità di misura per la lunghezza e per il tempo in modo che il limite naturale delle velocità diventi $c = 1$.

Se poi s'introduce $t \sqrt{-1} = s$ al posto di t, allora l'espressione differenziale per $d\tau^2$ apparisce pienamente simmetrica in x, y, z, s, e questa simmetria si riproduce nell'espressione matematica d'ogni legge che non contraddica al *postulato universale*. Sicchè l'essenza di questo postulato matematicamente si può vestire d'una formula mistica molto significante: $3{,}10^5$ km. $= \sqrt{-1}$ sec.

V.

I vantaggi che si ottengono con l'introduzione del *postulato universale* non sono mai tanto in luce come nello studio degli effetti prodotti da una carica puntiforme comunque moventesi, conforme alla teoria Maxwell-Lorentz. Immaginiamo di avere la *linea universale* d'un tale elettrone puntiforme con una carica e, introduciamo sopra di essa a partire da un punto qualunque il *tempo proprio* τ. Per avere il campo prodotto dall'elettrone in un *punto universale* qualunque P_1 costruiamo l'*anticono* appartenente a P_1. Questo incontra la *li-*

1) J. R. Schütz. Prinzip der Absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr. 1897 p. 110.

nea universale indefinita dell' elettrone in un sol punto P (fig. 4), perchè le sue direzioni sono ovunque vettori di specie tempo.
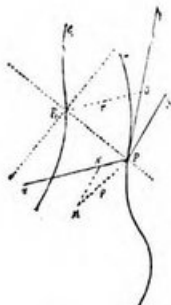
Fig. 4.

Consideriamo in P la tangente alla *linea universale* e costruiamo per P_1 la normale P_1Q a questa tangente. Sia r la lunghezza di P_1Q.

Come grandezza di PQ secondo la definizione dell' anticono deve prendersi $\frac{r}{c}$. Allora il vettore di grandezza $\frac{e}{r}$ nella direzione PQ, fornisce colle sue componenti secondo gli assi x, y, z il potenziale vettoriale moltiplicato per c, e colla componente secondo l'asse t dà il potenziale scalare del campo prodotto dall' elettrone nel *punto universale* P_1. In ciò consiste la legge elementare data da A. Liénard [1]) e E. Wiechert [2]).

Dalla descrizione del campo prodotto da un elettrone ne viene che la distinzione del campo in forza elettrica e magnetica è relativa e dipendente dalla scelta dell' asse del tempo. Le due forze possono insieme rappresentarsi il più chiaramente possibile paragonandole con una certa analogia, quantunque non completa, ad una forza elicoidale della meccanica.

1) A. Liénard. L'Éclairage électrique, 16, 5, 53, 106, 1898.
2) E. Wiechert. Arch Néerl. (2), 5, 549, 1900.

Darò ora la forza ponderomotrice esercitata da una carica puntiforme qualunque in movimento sopra un'altra qualsiasi carica puntiforme in movimento. Immaginiamo la *linea universale* di un elettrone puntiforme di carica e_1 passante per un punto P_1. Determiniamo P, Q, r, come sopra, costruiamo poi il centro M dell'iperbole di curvatura in P, e finalmente la normale MN da M ad una parallela a QP_1 uscente da P. Assumiamo un sistema di riferimento coll'origine in P e così formato: l'asse t nella direzione PQ, l'asse x nella direzione QP_1, l'asse y in quella MN, con ciò la direzione di z è individuata come perpendicolare agli assi t, x, y. Il vettore di accelerazione in P sia $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, il vettore di moto in P_1 sia $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{t}_1$, allora il vettore della forza in moto esercitata dal primo elettrone mobile sul secondo elettrone mobile nel *punto universale* P_1 sarà

$$-e e_1 \left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c} \right) k$$

dove per le componenti k_x, k_y, k_z, k_t del vettore k esistono le tre relazioni

$$c k_t - k_x = \frac{1}{r^2}; \quad k_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}; \quad k_z = 0$$

e in quarto luogo questo vettore k è normale al vettore di moto in P_1, e quindi dipende solo dall'ultimo vettore di moto.

Se si paragonano con questo enunciato le forme adoperate finora per la legge elementare [1]) sull'azione mutua ponderomotrice di cariche puntiformi in movimento, si dovrà riconoscere che le relazioni qui considerate appariscono chiare e semplici solo nello spazio a quattro dimensioni, ma la loro proiezione sopra lo spazio ristretto a tre dimensioni è complicatissima.

Nella Meccanica riformata secondo il postulato della relatività cadono da se stesse le disarmonie che sono sorte fra la

1) K. Schwarzschild. Gött. Nachr. 1903, p. 132; H. A. Lorentz. Enzyk. d. math. Wissensch. Art. V. 14. 199.

meccanica di Newton e la nuova elettrodinamica. Accennerò qui alla posizione della legge di attrazione newtoniana per rispetto a questo postulato.

Ammetto che se due punti di massa m, m_1 descrivono le loro *linee universali*, si eserciti da m sopra m_1 un vettore di forza in moto della stessa espressione che è stata data nel caso degli elettroni, solo che in luogo di $-e\,e_1$ debba porsi $+m\,m_1$. Consideriamo il caso speciale in cui il vettore di accelerazione di m sia costantemente eguale a zero, allora si potrà introdurre t in modo che m sia da considerarsi come in quiete; il moto di m_1 inoltre abbia luogo solo per il vettore di forza prodotto da m. Modifichiamo poi questo vettore moltiplicandolo per

$$i^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

il quale fattore si riduce ad 1, a meno di grandezze dell'ordine di $\frac{1}{c^2}$, allora si dimostra [1]) che per il luogo x_1, y_1, z_1 di m_1 e per il suo movimento nel tempo seguirebbero ancora le leggi di Keplero con la sola differenza che in luogo del tempo t_1 si introdurrebbe il tempo proprio τ_1 di m_1. Con questa semplice osservazione si vede subito che la legge di attrazione nella nuova meccanica non è meno atta a interpetrare le osservazioni astronomiche di quello che sia la legge d'attrazione di Newton collegata con la meccanica di Newton.

Anche le equazioni fondamentali per i fenomeni elettromagnetici nei corpi ponderabili si adattano pienamente al postulato della relatività. Non occorre anzi nemmeno di abbandonare perciò la deduzione data da Lorentz di queste equazioni in base ai concetti della teoria degli elettroni.

La validità senza eccezione del postulato della relatività è, a quanto credo, il vero perno di un'immagine elettromagnetica dell'universo, che, scoperta da Lorentz, sviluppata da Einstein appare ormai del tutto in piena luce.

1) H. Minkowski. l. c., p. 110.

Proseguendo a stabilire le conseguenze matematiche, si troveranno sufficienti verifiche sperimentali del postulato perchè anche quelli, pei quali un cambiamento nelle vedute abituali è antipatico o doloroso, possano convincersi alla visione di una prestabilita armonia tra la matematica pura e la fisica.